

**Міністерство освіти і науки  
України**



**ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ  
ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

**Спеціальності: 6.060101**

**6.060103**

**6.050503**

**6.050202**

**6.040106**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

**ДО ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ МОДУЛЯ**

**“ВВЕДЕННЯ В АНАЛІЗ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ  
ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ”**  
з курсу “Вища математика”

**Харків 2008**

## ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки призначені для надання допомоги студентам в організації самостійної роботи за темами “ Введення в аналіз і диференціальне числення функції однієї змінної ”.

Результативність самостійної роботи забезпечується системою контролю, яка включає наступні етапи:

- виконання індивідуальних домашніх завдань;
- виконання контрольної роботи на тему “ Похідна функції ”;
- виконання і складання підсумкового завдання на тему “ Дослідження функції за допомогою похідної ”;
- виконання модульної контрольної роботи з усієї теми модуля.

Методичні вказівки містять робочу програму модуля, індивідуальні домашні завдання, варіанти підсумкового завдання і зразок його виконання, а також варіанти тестових завдань, зразок виконання модульного контролю і питання для підготовки до його складання.

## 1 ПРОГРАМА МОДУЛЯ

### 1.1 Введення в математичний аналіз

- 1 Поняття функції, способи її задання. Основні елементарні функції.
- 2 Границя змінної величини, границя функції в точці. Властивості функцій, що мають границю.
- 3 Нескінченно малі і нескінченно великі, їх властивості і зв'язок між ними.
- 4 Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі. Їх використання під час обчисленні границь.
- 5 Перша та друга чудові границі.
- 6 Неперервність функції в точці та на відрізку. Властивості функцій неперервних на відрізку.
- 7 Односторонні границі. Точки розриву функції і їх класифікація.

### 1.2 Диференціальне числення функції однієї змінної

- 1 Задачі, що приводять до поняття похідної. Похідна функції, її геометричний та механічний сенс. Похідні суми, добутку та відношення функцій .
- 2 Похідна складної функції. Похідна оберної функції. Таблиця похідних.
- 3 Похідна неявної функції і функції, заданої параметрично. Правило логарифмічного диференціювання.
- 4 Диференційованість функції. Диференціал функції. Зв'язок диференціала з похідною. Геометричний сенс диференціала.
- 5 Похідні та диференціали вищих порядків.
- 6 Теорема Ролля, Лагранжа та Коші. Правило Лопіталя.
- 7 Дотична і нормаль до кривої; кривизна кривої.

### 1.3 Дослідження функцій за допомогою похідних

1 Умови зростання та спадання функції. Точки екстремуму. Необхідні і достатні ознаки існування екстремуму. Знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції.

2 Дослідження функцій на екстремум за допомогою похідних вищих порядків.

3 Необхідні і достатні умови опуклості й угнутості функції та точок перегину.

4 Асимптоти кривої та загальна схема побудови графіків.

## 2 ВАРИАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ДОМАШНІХ ЗАВДАНЬ

**Завдання 1.** Знайти границі, використовуючи еквівалентні нескінченно малі функції ( $n$  - номер варіанта).

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin nx}{\operatorname{tg}(n+1)x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos nx - \cos x}{nx^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} nx}{2nx^2 - x}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos nx}{2x^2}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 nx}{5x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(n+1)x} - 1}{\operatorname{tg} 5x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+nx)}{2x^2}$

**Завдання 2.** Знайти границі функцій ( $n$  - номер варіанта).

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{nx^{n+1} - x + 7}{nx^{n+2} - 1}$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \sqrt{x^2 + nx + 1} \right)$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n - 5x + 6}{nx^n - x + 3}$

7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( (n+1)^{-x} + \frac{1}{nx} \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + 2x - n}{3x^{n-1} + 5}$

8.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{(n+1)x + 1}{nx} \right)^{nx}$

4.  $\lim_{x \rightarrow n} \frac{x^2 - (n+1)x + n}{x^2 - n^2}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{nx^2}{1-x^2} + (n+1)^{\frac{1}{x}} \right)$

5.  $\lim_{x \rightarrow n} \frac{\sqrt{x-n+1} - 1}{n^2 - x^2}$

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{nx+1}{nx+2} \right)^{nx}$

**Завдання 3.** а) Дослідити на неперервність функції та побудувати їх графіки.

б) Дослідити на неперервність функцію в точках  $x_1, x_2$ .

**Варіант № 1**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1 \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}} + 1, \quad x_1 = 3; x_2 = 4$$

**Варіант № 2**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1 \\ 2x, & 1 < x \leq 3 \\ x+2, & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 5^{\frac{1}{x-2}} - 1, \quad x_1 = 2; x_2 = 4$$

**Варіант № 3**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2 \\ -x+4, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x+7}{x-2}, \quad x_1 = 2; x_2 = 3$$

**Варіант № 4**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0 \\ x+1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 3+x, & x > 4 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x-5}{x+3}, \quad x_1 = -2; x_2 = -3$$

**Варіант № 5**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1 \\ x+1, & -1 < x \leq 1 \\ -x+3, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}} + 2, \quad x_1 = 2; x_2 = 3$$

**Варіант № 6**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}} + 1, \quad x_1 = 0; x_2 = 2$$

**Варіант № 7**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2 \\ x-3, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 2^{\frac{1}{x-5}} + 1, \quad x_1 = 4; x_2 = 5$$

**Варіант № 8**

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2+x, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 5^{\frac{1}{x-4}} - 2, \quad x_1 = 3; x_2 = 4$$

**Вариант № 9**

$$a) f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & x \leq -1 \\ (x+1)^3, & -1 < x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$b) f(x) = 6^{\frac{1}{3-x}} + 3, \quad x_1 = 3; x_2 = 4$$

**Вариант № 11**

$$a) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \frac{x-3}{x+4}, \quad x_1 = -5; x_2 = -4$$

**Вариант № 13**

$$a) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x < 2 \\ 2x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = 5^{\frac{2}{x-3}}, \quad x_1 = 3; x_2 = 4$$

**Вариант № 15**

$$a) f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2^x, & 0 < x \leq 2 \\ x+3, & x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = 2^{\frac{1}{2-x}} - 1, \quad x_1 = 2; x_2 = 0$$

**Вариант № 10**

$$a) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2, & 0 < x \leq 2 \\ x+1, & x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}} + 1, \quad x_1 = 4; x_2 = 5$$

**Вариант № 12**

$$a) f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x < \pi \\ 2, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$b) f(x) = \frac{x+5}{x-2}, \quad x_1 = 3; x_2 = 2$$

**Вариант № 14**

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1 \\ -x, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = 4^{\frac{2}{x-1}} - 3, \quad x_1 = 1; x_2 = 2$$

**Вариант № 16**

$$a) f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2+1, & 0 \leq x < 2 \\ x+1, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = 8^{\frac{4}{2-x}} - 1, \quad x_1 = 0; x_2 = 2$$

**Вариант № 17**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \leq -2 \\ x^3, & -2 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}} + 1, \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 3$$

**Вариант № 19**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1 \\ x^2-2, & -1 < x < 2 \\ x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2$$

**Вариант № 21**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3 \\ -x+6, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 4^{\frac{3}{x-2}} + 2, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 2$$

**Вариант № 23**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1 \\ x^2+2, & 1 \leq x \leq 2 \\ -2x, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 5^{\frac{3}{4-x}} + 1, \quad x_1 = 5; \quad x_2 = 4$$

**Вариант № 18**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 2 \\ x^2-2, & x > 2 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{3x}{x-4}, \quad x_1 = 4; \quad x_2 = 5$$

**Вариант № 20**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi \\ 3, & x \geq \pi \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 2^{\frac{3}{x+2}} + 1, \quad x_1 = -2; \quad x_2 = -1$$

**Вариант № 22**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1 \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 3 \\ 2x, & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = 3^{\frac{2}{1+x}} - 2, \quad x_1 = 0; \quad x_2 = -1$$

**Вариант № 24**

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1 \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3 \\ -x+5, & x > 3 \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{x-4}{x+2}, \quad x_1 = -2; \quad x_2 = -1$$

**Варіант № 25**

$$a) f(x) = \begin{cases} x+3, & x \leq 0 \\ -x^2+4, & 0 < x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$$б) f(x) = \frac{x-4}{x+3}, \quad x_1 = -3; \quad x_2 = -2$$

**Варіант № 27**

$$a) f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x^2-1, & -1 < x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases}$$

$$б) f(x) = 3^{\frac{4}{1-x}} + 1, \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2$$

**Варіант № 29**

$$a) f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1 \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$$

$$б) f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 4$$

**Варіант № 26**

$$a) f(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ -x+1, & -2 \leq x \leq 1 \\ x^2-1, & x > 1 \end{cases}$$

$$б) f(x) = \frac{x+5}{x-3}, \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 4$$

**Варіант № 28**

$$a) f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 1-x, & x > \pi \end{cases}$$

$$б) f(x) = \frac{4x}{x+5}, \quad x_1 = -5; \quad x_2 = -4$$

**Варіант № 30**

$$a) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^3, & 0 < x \leq 2 \\ x+4, & x > 2 \end{cases}$$

$$б) f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 3$$

**Завдання 4.** Знайти похідні від заданих функцій.

**Варіант № 1**

$$1. S(t) = 5t^3 - t^2$$

$$2. r(\varphi) = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$$

$$3. y = \frac{x^2}{\ln x}$$

$$4. y = \arctg \sqrt{4x-1}$$

$$5. y = (\cos x^2)^2$$

$$6. y = 3^{ctgx}$$

$$7. y = \arcsin(1-x) + \sqrt{2x-x^2}$$

$$8. y = \ln \ln(3-2x^3)$$

$$9. y = x^4(1-2x^3)^2$$

$$10. f(t) = t \sin 2^t$$

## Варіант № 2

1.  $y = \arccos x^3$
2.  $y = e^{\sin 2x}$
3.  $y = 4^x + x^4$
4.  $y = \ln(x^2 + 5x + 6)$
5.  $y = \frac{1}{(1 + \cos 2x)^3}$
6.  $y = 5 \lg^3(4x + 1)$
7.  $y = e^{x^2} \ln x$
8.  $S(t) = \sqrt{1 - e^{4t}}$
9.  $y = 3 \sin^2 x - \sin^3 x$
10.  $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$

## Варіант № 3

1.  $y = x^2 \ln x$
2.  $y = 3^{\sin \frac{x}{4}}$
3.  $y = \cos(3 - 4x)$
4.  $y = (2x^2 - 7)^3$
5.  $y = \sqrt{x^4 + 2x + 3}$
6.  $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$
7.  $y = (x^2 - 2x + 2)e^{3x}$
8.  $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$
9.  $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$
10.  $S(t) = 3 \sin^3 t^3$

## Варіант № 4

1.  $y = e^{\cos^2 x}$
2.  $y = \ln \ln(x^2 + 1)$
3.  $y = (3 - 2 \sin x)^5$
4.  $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2$
5.  $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - (\arcsin x)^3$
6.  $f(t) = \frac{1}{3 \cos^2 t} - \frac{1}{\cos t}$
7.  $y = \frac{x^5}{x^3 - 2}$
8.  $z(t) = (\sqrt{t^3} + 1)t$
9.  $y = 10^{x \operatorname{tg} x}$
10.  $y = 5 \operatorname{ctg} \frac{x}{5} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$

## Варіант № 5

1.  $S(t) = \frac{t^3}{(1-t)^2}$
2.  $y = 3 \sin(3x + 5)$
3.  $y = (1 + \cos^2 x)^4$
4.  $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$
5.  $y = x^2 \log_3 x$
6.  $y = 5^{2x-3}$
7.  $y = e^{\arcsin 2x}$
8.  $y = \ln(x^2 - 4x)$
9.  $y = \sin^2 x \sin x^2$
10.  $y = 5(\operatorname{arctg} x + \ln(1 + x^2))$



### Варіант № 6

1.  $y = 5(\operatorname{tg} x - x^2)$

2.  $y = \frac{1}{e^x + 1}$

3.  $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$

4.  $y = (2x^3 + 5)^7$

5.  $y = \operatorname{arctg} \frac{\ln x}{3}$

6.  $y = \frac{\sin x}{1 + \ln \sin x}$

7.  $y = \sqrt{\cos(3x - 2)}$

8.  $S(t) = \ln(2t^3 + 3t^2)$

9.  $y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2}$

10.  $y = e^{\sqrt{x}} - 2^{\arcsin 3x}$

### Варіант № 7

1.  $r(\varphi) = 2\cos^2 \frac{\varphi}{2}$

2.  $y = \operatorname{ctg} \sqrt{x}$

3.  $z = \sqrt[4]{1 + \cos x^4}$

4.  $S(t) = \sin 3t \cos \frac{t}{3}$

5.  $y = \ln \frac{x^2}{1 - x^2}$

6.  $y = 5^{3x+2}$

7.  $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$

8.  $y = (x^4 + 1)e^{6x}$

9.  $y = 3(2x^3 + 3)^5$

10.  $y = \operatorname{arctg}^4(2x - 1)$

### Варіант № 8

1.  $S(t) = \left(\frac{t}{2t+1}\right)^{10}$

2.  $y = \sqrt[3]{2 + x^5}$

3.  $y = x^3 e^{2x}$

4.  $y = \ln(11e^x + 2)$

5.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$

6.  $y = 2^{\cos x^2}$

7.  $y = 5\sin(2 - 3x)$

8.  $y = \arcsin \sqrt{x}$

9.  $z(\varphi) = \operatorname{tg}(\varphi + \operatorname{tg} \varphi)$

10.  $y = 6\log_5(3x - 4)$

### Варіант № 9

1.  $z(\varphi) = \sin^3 2\varphi - \cos^3 2\varphi$

2.  $y = \frac{3+2x}{3-2x}$

3.  $y = \ln \sqrt{10x - x^2}$

4.  $y = e^x(x^3 + 3x^2)$

5.  $y = (7^{2x} - 3)^5$

6.  $y = \operatorname{ctg}(x + e^{\frac{x}{2}})$

7.  $y = 5\log_5(x^3 - 1)$

8.  $y = 6^{\arccos 3x}$

9.  $y = \cos(3^x - 3^{-x})$

10.  $y = \operatorname{tg}(3x + 1)^3$

### Варіант № 10

1.  $y = \cos\left(6x - \frac{1}{x}\right)$

2.  $y = \cos^2 x + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

3.  $y = 7^{\sin^3 x}$

4.  $y = \operatorname{ctg}(x \sin x)$

5.  $z(t) = \frac{e^t}{1 - e^t}$

6.  $y = (1 + 2x)^8$

7.  $y = \operatorname{tg} \sqrt{\cos x}$

8.  $y = \log_2(1 - 2x)$

9.  $y = 3e^{4x-1}$

10.  $y = \operatorname{arccctg}^3 \frac{1}{x}$

### Варіант № 11

1.  $y = e^x \ln \sin x$

2.  $y = 5 \operatorname{ctg}(3 - 4x)$

3.  $y = 2^{\operatorname{tg}^2 x}$

4.  $y = \log_5(x^2 - 4x)$

5.  $y = \frac{x^2}{3x + 1}$

6.  $y = \sqrt{1 + 3 \operatorname{tg}^2 x}$

7.  $y = \cos(x^3 - 3^x)$

8.  $y = e^{\sqrt{\ln x}}$

9.  $y = 3^{\arcsin 4x}$

10.  $y = \arccos \sqrt{1 - 3x}$

### Варіант № 12

1.  $y = \cos^2(6x + 7)$

2.  $y = xe^{1 - \cos x}$

3.  $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^8 x}$

4.  $f(t) = \lg(t - \operatorname{cost})$

5.  $r(\varphi) = \frac{\varphi}{1 - \varphi^2}$

6.  $y = \sin^3 \cos 3x$

7.  $y = \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x$

8.  $y = \arcsin \frac{3}{x}$

9.  $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{1 + x^2}$

10.  $y = \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$

### Варіант № 13

1.  $S(t) = \sqrt[3]{1 + 2 \operatorname{tg} t}$

2.  $y = \operatorname{arccctg} \sqrt{6x - 1}$

3.  $y = \log_3^5 \cos x$

4.  $y = \ln(x^3 + \sin 2x)$

5.  $y = \frac{x^2}{1 + 5x}$

6.  $y = \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{2x}$

7.  $y = 2^{\cos x^3}$

8.  $y = \sin^4 \left( \frac{x^2}{4} - 1 \right)$

9.  $y = 3 + 3e^{2x}$

10.  $y = \sqrt[12]{(x^3 - 6x)^5}$

### Варіант № 14

1.  $S(t) = \frac{1}{4}tg^4t - \frac{1}{2}tg^2t$

2.  $y = \ln(e^{2x} + 1) - 2arctge^x$

3.  $y = \log_4^3(\sin 3x + 1)$   
 $= 2\cos\varphi + \cos 2\varphi$

4.  $y = x^2 ctg \frac{x}{4}$

5.  $y = (5x^4 + 3)^7$

6.  $y = \frac{\sin x}{x}$

7.  $y = \sqrt{1 - 7^{tgx}}$

8.  $r(\varphi)$

9.  $y = 2^{tgx}$

10.  $y = 3e^{ctg\sqrt{x}}$

### Варіант № 15

1.  $y = \ln(e^{-2x} + xe^{-3x})$

2.  $y = 6\cos^2 x + 7$

3.  $y = arctg\sqrt[3]{x^2}$

4.  $y = tg^3(7x - 5)$

5.  $r(\varphi) = \varphi^2 \sqrt{\varphi^2 - 3}$

6.  $S(t) = \frac{2t}{t+1}$

7.  $y = \lg(x^3 + 3^{\ln x})$

8.  $y = \frac{1}{\sin^2 5x}$

9.  $y = 3^{tg5x}$

10.  $y = 3e^{ctg\sqrt{x}}$

### Варіант № 16

1.  $y = (1 + x^2)arctgx$

2.  $y = \left(5^{\sin 3x} + ctg \frac{x}{3}\right)^4$

3.  $y = \arccos^2 5x$

4.  $S(t) = \ln tg 7t$

5.  $y = \frac{x^3}{1 - x^2}$

6.  $y = x + \frac{1}{2}\cos 2x$

7.  $y = \sqrt{ctg(3x + 2)}$

8.  $y = e^{\cos^5 \frac{x}{2}}$

9.  $f(t) = \sqrt[5]{(1 - t^2)^3}$

10.  $y = x^{\sqrt{2}} + tg \frac{\pi}{4}$

### Варіант № 17

1.  $y = 3^{\ln x} + 3 \ln x$

2.  $S(t) = e^t(1-t)$

3.  $y = \ln\left(\sin^3 4x + \operatorname{arctg} \frac{x}{4}\right)$

4.  $y = 7e^{-x^3}$

5.  $y = \sqrt{\lg \frac{e}{x}}$

6.  $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

7.  $y = (1 + \cos^5 3x)^3$

8.  $y = \cos \frac{x}{3} \sin \frac{\pi}{2}$

9.  $r(\varphi) = \frac{1}{4}\varphi^4 + \frac{1}{3}\varphi^3$

10.  $y = \sin 2^x$

### Варіант № 18

1.  $y = x^3 \ln(x^2 + 5)$

2.  $y = 3^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$

3.  $y = 3 \lg^2 4x$

4.  $y = \frac{1}{2}e^{3x+5}$

5.  $y = \sqrt{x^2(4-x)}$

6.  $y = \arcsin\left(\frac{x}{2} - 1\right)$

7.  $S(t) = \frac{t^3}{t+2}$

8.  $y = 2 \sin \frac{x^2}{4}$

9.  $y = (6 \cos 7x + 5)^3$

10.  $y = \sqrt[4]{e^{4x-5} + 2}$

### Варіант № 19

1.  $y = \ln \sqrt{4x^2 + 1}$

2.  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{arctg} 5x}$

3.  $y = e^{\frac{\sin^2 x}{2}}$

4.  $y = (5x^2 - 3x)^4$

5.  $y = 3 \log_4(2x-1)$

6.  $y = \ln(1 + \log_3 x)$

7.  $y = \sqrt{2 \operatorname{ctg}(8x+1)}$

8.  $y = 5e^{1+3x}$

9.  $y = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$

10.  $S(t) = \sin^3(2t - t^2)$

### Варіант № 20

1.  $y = \ln(1 + \log_3 x)$

2.  $y = x \arcsin \frac{x}{3}$

3.  $y = 2^{\operatorname{tg} x^2}$

4.  $r(\varphi) = \frac{1 + \cos 3\varphi}{\sin 2\varphi}$

5.  $y = 4x + \operatorname{arctg}^3 x$

6.  $y = \frac{2x}{1 - x^2}$

7.  $y = 3^{\operatorname{ctg} \sqrt{x}}$

8.  $S(t) = e^{2t} \sin 3t$

9.  $y = 5e^{\operatorname{tg} \sqrt{5x}}$

10.  $y = 9 \arcsin \frac{x}{3}$

### Варіант № 21

1.  $y = \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x$

2.  $y = 3 \sin(3 \ln^2 x)$

3.  $y = \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x$

4.  $y = 7^{\ln(1-3x)}$

5.  $S(t) = \sin t - t \cos t$

6.  $y = \frac{2x}{1 - x}$

7.  $y = (\sqrt[3]{4x^2 + 1})^2$

8.  $y = 5e^{1+3x^2}$

9.  $y = x^2 \cos \frac{x}{5}$

10.  $y = 2 \log_3 \cos x$

### Варіант № 22

1.  $r(\varphi) = \varphi \sqrt{9 - \varphi^2}$

2.  $y = \frac{3x^2}{1 - x^3}$

3.  $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{2x - 1}$

4.  $y = 3 \arccos e^x$

5.  $S(t) = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{8} t$

6.  $y = 3^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x^2}}$

7.  $y = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \ln 3$

8.  $y = \ln(1 + e^{4x})$

9.  $y = (5^{\sin 3x} + 2)^8$

10.  $y = \cos \sqrt{4x + 1}$

### Варіант № 23

1.  $y = e^x (\sin 2x + \cos 2x)$

2.  $S(t) = \frac{3t}{1-t^3}$

3.  $y = \sqrt{\frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$

4.  $y = \ln(1 + e^{10x})$

5.  $y = \sqrt[5]{\operatorname{ctg} \frac{x}{3}}$

6.  $y = 10^{5x-4}$

7.  $y = e^{\sqrt{\ln x}}$

8.  $r(\varphi) = 3 \cos^2 \varphi - \cos^3 \varphi$

9.  $y = \sqrt[5]{(1+3x^2)^4}$

10.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{1 + \ln(2x+3)}$

### Варіант № 24

1.  $S(t) = \sqrt{1 + \cos^2 t^2}$

2.  $y = \ln \left( 3^{\frac{1}{x}} + 2 \right)$

3.  $y = x7^{\sqrt{x}}$

4.  $y = 7 \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} - 3 \right)$

5.  $y = \log_3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$

6.  $y = \frac{x}{1+8x^2}$

7.  $y = \operatorname{arccctg} \frac{4x-1}{\sqrt{3}}$

8.  $y = \sqrt{e^{2x} + 4e^x}$

9.  $y = 6^{\arcsin 2x}$

10.  $y = (2 + \sin^5 x)^6$

### Варіант № 25

1.  $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$

2.  $y = \frac{3x^2 - 1}{x^3}$

3.  $y = \ln(2e^{\sin x} + 1)$

4.  $S(t) = 5 \operatorname{tg} \frac{t}{5} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{16}$

5.  $y = \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$

6.  $f(t) = (t^3 + 1)e^{2t}$

7.  $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

8.  $r(\varphi) = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$

9.  $y = 2 + \lg \left( 4 - \frac{\ln x}{x} \right)$

10.  $y = \operatorname{arctg}^3(3^x + 2)$

### Варіант № 26

1.  $y = \ln(2x + \sqrt{1 + 4x^2})$

2.  $y = e^{2x} \cos(2^x + 2)$

3.  $y = (2^{\sqrt{3}} - \operatorname{ctg} 3x)$

4.  $S(t) = \frac{\sin^2 t}{\cos 2t}$

5.  $y = x^2 \sqrt{1 + \ln x}$

6.  $f(t) = te^{\frac{2}{t}}$

7.  $y = \lg^4(1 - 2x)$

8.  $r(\varphi) = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$

9.  $y = \operatorname{arctg}^5 \sqrt{\sin x}$

10.  $y = 3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + e^{1-x^3}$

### Варіант № 27

1.  $y = (e^{\operatorname{tg} 2x} - \sin 2x)^3$

2.  $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{x^3 + 1}$

3.  $y = e^{3x} \sqrt{1 + e^{2x}}$

4.  $S(t) = \sqrt[3]{(2t \sin t + 1)^2}$

5.  $y = \frac{x^2}{\ln x}$

6.  $y = \arccos 7x^2 + 3$

7.  $r(\varphi) = \ln \cos 2\varphi + \sin \frac{\pi}{4}$

8.  $y = 2x \operatorname{arctg}^3 \frac{x}{5}$

9.  $y = \sqrt[5]{\operatorname{ctg} \frac{x}{3} + 3}$

10.  $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$

### Варіант № 28

1.  $y = \ln \sqrt[3]{\frac{3x^2 - 1}{3x^2 + 1}}$

2.  $y = \arcsin \sqrt{1 - 9x^2}$

3.  $S(t) = t^2 e^{-2t}$

4.  $y = (3^{\cos x} - 2)^3$

5.  $r(\varphi) = \ln \sin \varphi - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi$

6.  $y = 0,5 \operatorname{tg}(x^{-1} - \sqrt[3]{x^2})$

7.  $f(t) = 2t^3(t^2 - 4)^{-1}$

8.  $y = e^{x^3} + \sqrt{17x - 1}$

9.  $y = \operatorname{arctg}[x(1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}]$

10.  $y = \log_2^5(3x^2 + 7)$

### Варіант № 29

$$1. y = 4^{\cos 2x} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$2. y = \operatorname{arctg} \sqrt{4x+5}$$

$$3. y = \ln \cos^3 x$$

$$4. y = (1+4x^2) \operatorname{arctg} 2x$$

$$5. S(t) = \left( \frac{1}{\sin t} + 1 \right)^{\sqrt{3}}$$

$$6. y = \operatorname{ctg} \sqrt[5]{(1-x)^4}$$

$$7. y = \frac{1+x^3}{2-x^2}$$

$$8. r(\varphi) = \cos^2 \varphi + \frac{\varphi}{\sin \varphi}$$

$$9. y = (x^2 2t + 2)e^{-2t}$$

$$10. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

### Варіант № 30

$$1. y = \left( 3^{\cos 3x} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)^4$$

$$2. y = e^{\sqrt{\ln \operatorname{tg} 2x}}$$

$$3. S(t) = \ln(e^{-t} + te^t)$$

$$4. y = \cos \operatorname{tg} x - \sin 3^{\ln x}$$

$$5. r(\varphi) = \varphi \cdot \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{5} \right)$$

$$6. y = \log_3^4(x^2 + 4x)$$

$$7. y = \frac{3-x^2}{x+2}$$

$$8. y = e^{3x}(2 \cos 5x - 3 \sin 5x)$$

$$9. f(t) = \frac{1}{2} \arcsin^5 \frac{2}{x}$$

$$10. y = x^3(e^\pi - \operatorname{tg} 2x)$$

**Завдання 5.** Знайти похідні першого порядку від заданих функцій.

### Варіант № 1

$$1. y = 5^{x^2 \sin^3 x} + \left( \sin \frac{x}{4} \right)^{\sqrt{2}}$$

$$2. y = \sqrt[4]{3x + x^5} \sqrt{x^2}$$

$$3. y = \ln \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$4. y = (x^3 + 1)^{\operatorname{tg} \frac{2x}{2}}$$

$$5. y \sin x - \cos(x - y) = 0$$

$$6. \begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1} \\ y = \frac{t}{t^2-1} \end{cases}$$



## Варіант № 2

$$1. y = \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{1 + e^{4x^2}}$$

$$2. y = \ln \sin 3x + x^2 \arcsin^5 2x$$

$$3. y = \sqrt[5]{(1-x^2)^2}$$

$$4. y = \left( \sin \frac{x}{4} \right)^{\operatorname{tg}^3 \frac{2}{x}}$$

$$5. \operatorname{arctg} y = x + y^2$$

$$6. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t \end{cases}$$

## Варіант № 3

$$1. y = \frac{\sqrt{5x^3 + 1}}{4 + 5x^3}$$

$$2. y = (1 + \operatorname{ctg}^3 5x) e^{\frac{x}{3}}$$

$$3. y = \ln^2 \cos \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$4. y = \cos^x (3x + 1)$$

$$5. x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$$

$$6. \begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - \operatorname{arctg} t \end{cases}$$

## Варіант № 4

$$1. y = \frac{\sqrt{1 - \sin^3 2x}}{1 + \cos 4x}$$

$$2. y = e^{\operatorname{tg}^5 \frac{x}{3}} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$$

$$3. y = \frac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln \sqrt{1 + x^2}$$

$$4. y = (\ln \operatorname{tg} x)^{\sin^2 x}$$

$$5. x - y = \arcsin x - \arcsin y$$

$$6. \begin{cases} x = \ln(t^3 + 2) \\ y = \frac{t}{t^3 + 2} \end{cases}$$

## Варіант № 5

$$1. y = x^2 \operatorname{tg}^5 3x + \arcsin^2 \frac{x}{5}$$

$$2. y = \ln \frac{\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3}}{1 + \cos^2 x}$$

$$3. y = 10^{1 - \sin^4 3x}$$

$$4. y = (\operatorname{arctg} \sqrt{3x + 1})^{x^3 + 1}$$

$$5. e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$$

$$6. \begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$$

### Варіант № 6

$$1. y = \ln(9x^3 + \sqrt[3]{x^5 + 1})$$

$$2. y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} + \ln \operatorname{tg}^3 \frac{x}{7}$$

$$3. y = (1 + \sin^3 3x)e^{\operatorname{arctg}^2 5x}$$

$$4. y = (x^3 - 1)^{\cos \sqrt{x}}$$

$$5. x^2 \ln(1 + y^3) + y \ln(1 + x^3) = 0$$

$$6. \begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

### Варіант № 7

$$1. y = \sin^4(3x - 1)e^{-x^3}$$

$$2. y = \sqrt[4]{(1 + \cos^5 7x)^3}$$

$$3. y = 3 \operatorname{tg} \frac{x}{5} + 3 \operatorname{tg}^5 x$$

$$4. y = \left( \frac{x^3}{1+x^2} \right)^x$$

$$5. (y^3 - x^3)^2 - x^2 y + y - x = 0$$

$$6. \begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

### Варіант № 8

$$1. y = \ln \left( \sin^3 4x + \operatorname{arctg} \frac{x}{4} \right)$$

$$2. y = \sqrt[5]{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}}$$

$$3. y = e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}} \operatorname{arcsin}^2 \ln x$$

$$4. y = (\operatorname{arctg} \sqrt{x})^{\ln(x^2 + 1)}$$

$$5. (x^2 + 1)^2 + (y^2 + 1)^2 - xy = 0$$

$$6. \begin{cases} x = 3t - \sin 3t^2 \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$$

### Варіант № 9

$$1. y = \sqrt[7]{\frac{3x+2}{1-4x}}$$

$$2. y = \operatorname{ctg}^5 x \operatorname{ctg} 5x$$

$$3. y = \ln \frac{1 - e^{2x}}{e^{2x}}$$

$$4. y = (\ln^2 x)^{\cos 3x}$$

$$5. x^2 + y^2 + \operatorname{arcsin} y + y \operatorname{arctg} 2x = 0$$

$$6. \begin{cases} x = \frac{4-t}{1+t} \\ y = \frac{t^3}{2-t^3} \end{cases}$$

### Варіант № 10

$$1. y = \ln^5(2x+7) - \sqrt[3]{\sin^2 3x}$$

$$2. y = \sqrt{x e^{2x} + 2x^3}$$

$$3. y = 3^{ctg \frac{1}{x}} - \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$4. y = (x^3 + 2)\sqrt{tgx}$$

$$5. e^{-\frac{y}{x}} + \ln y = 2$$

$$6. \begin{cases} x = \ln(t^5 + 3) \\ y = \frac{t^2}{t^5 + 3} \end{cases}$$

### Варіант № 11

$$1. y = tg^5 3x - e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$2. y = \arcsin(x^3 + 5)$$

$$3. y = x^3 \ln(x^2 + 5) + \frac{1}{\cos^4 \frac{x}{5}}$$

$$4. y = (x^5 + 5)\cos 2x$$

$$5. x^3 y^2 + \sin y + (x - y)^2 = 0$$

$$6. \begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$$

### Варіант № 12

$$1. y = \ln \frac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{x^2}$$

$$2. y = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{\sin^3 x}$$

$$3. y = \frac{2x^3 - 1}{\sqrt{\cos \frac{x}{3}}}$$

$$4. y = \sin^2 x^{x^2-1}$$

$$5. (y^2 + x)^3 + (x^2 - 3y)^3 = 0$$

$$6. \begin{cases} x = t + \frac{1}{2} \cos 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$$

### Варіант № 13

$$1. y = 5^{ctg^2(5x+3)}$$

$$2. y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot e^{-3x}$$

$$3. y = \left( \frac{4}{3x^2} - \frac{1}{9x} \right) \sqrt{4x + x^2}$$

$$4. y = (\ln 3x)^{\arctg \frac{3}{x}}$$

$$5. \sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} + \sqrt[3]{\frac{y^2}{2}} = 5$$

$$6. \begin{cases} x = t^3 - 3\pi \\ y = t^3 - 6\arctg t \end{cases}$$

### Варіант № 14

$$1. y = \sqrt{3} \operatorname{arctg}^2 x + \frac{1}{x} + \operatorname{tg} \sqrt{x}$$

$$2. y = x^2 e^{-x^2} - 5^{1 - \ln^2 3x}$$

$$3. y = 3 \operatorname{arctg} \ln^3 \frac{1}{x}$$

$$4. y = \ln(\cos(7x))^{\sin \frac{x}{2}}$$

$$5. y - \cos^3 y + \sin^3 x = 0$$

$$6. \begin{cases} x = \arccos(t^3 + 1) \\ y = \arcsin 5t \end{cases}$$

### Варіант № 15

$$1. y = 2^{\arcsin 2x} + \left(1 - \arccos \frac{x}{3}\right)^3$$

$$2. y = e^x \cos 3x + \sqrt[7]{2x} + \sqrt[5]{x^3}$$

$$3. y = \frac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$4. y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$$

$$5. \ln y + \frac{x^2}{y} = 3$$

$$6. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t + t \cos t \end{cases}$$

### Варіант № 16

$$1. y = 5 \sin^2 \frac{x}{3} \operatorname{ctg} x$$

$$2. y = \ln \frac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$3. y = 5^{\arcsin \sqrt{x}} - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

$$4. y = (x^2 + e^x)^{\operatorname{tg}^3 x}$$

$$5. x e^y + y^2 = 10$$

$$6. \begin{cases} x = \frac{1}{t} - t \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$$

### Варіант № 17

$$1. y = \sqrt[5]{(3 - \sqrt{x \sin x})^3}$$

$$2. y = 3 \cos^2 \frac{x^2}{\ln x} + \operatorname{ctg} e^{x^2 + 4}$$

$$3. y = 5 \operatorname{arctg}(x^2 \ln x)$$

$$4. y = (1 - \sqrt{x})^{\cos \frac{1}{x}}$$

$$5. y^3 + \sqrt[3]{x} = \arcsin y$$

$$6. \begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sqrt{\operatorname{tg} t} \end{cases}$$

### Варіант № 18

$$1. y = \frac{1}{3} \arcsin(\cos^3 \frac{x}{5})$$

$$2. y = 5^{tg \frac{x}{2}} \ln x$$

$$3. y = \frac{e^{5x}}{1 + e^{3x}}$$

$$4. y = \ln^3 x^{x^7}$$

$$5. \sin(x + \sqrt{y}) = y^2 + 1$$

$$6. \begin{cases} x = t \sin t \\ y = \frac{t}{\cos t} \end{cases}$$

### Варіант № 19

$$1. y = 2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} + 3tg^3 \frac{x}{5}$$

$$2. y = e^{5x} \cos^2 3x + 7$$

$$3. y = \arctg^4(x \ln x)$$

$$4. y = (1 + 2^x)^{x^2 + 2}$$

$$5. 2^{x+y} = x + 10y$$

$$6. \begin{cases} x = 3e^{5t} \\ y = 5 \ln t \end{cases}$$

### Варіант № 20

$$1. y = 5 \sin 3^{\ln x} + 2$$

$$2. y = (2x + 3)e^{5x} + \frac{\ln x}{x}$$

$$3. y = (\ln 2)^{\sin x} - ctg^3 \frac{x}{2}$$

$$4. y = (3 + \ln^2 x)^{\sin^5 x}$$

$$5. 4x - y^4 = \cos(xy^2)$$

$$6. \begin{cases} x = 3t^2 + 1 \\ y = \arctg \sqrt{t} \end{cases}$$

### Варіант № 21

$$1. y = 2^{\sqrt{\cos(3x+5)}} + \ln ctg^3 \sqrt{x}$$

$$2. y = \frac{x^5}{\cos^2 7x} - \left( \cos 5^{\sqrt{tgx}} \right)^3$$

$$3. y = \sqrt[5]{\sin 10x} \cdot e^{\arctg \frac{1}{x}}$$

$$4. y = (x^7 + x)^{\sqrt{\ln x}}$$

$$5. x + tgy = 2^x + y^2$$

$$6. \begin{cases} x = \sqrt{1 + 3t} \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$$

### Варіант № 22

$$1. y = \frac{x}{\ln^2 x} + x^5 5^{\cos \frac{x}{2}}$$

$$2. y = (\operatorname{arctg} \sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}$$

$$3. y = 3 \arcsin^4 3x + \sqrt[3]{\ln^2 \operatorname{tg} \frac{x}{7}}$$

$$4. y = (2x + \cos 3x)^{\frac{1}{x}}$$

$$5. \arccos y + xy^2 = 1$$

$$6. \begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = t^2 + \operatorname{ctg} \sqrt{t} \end{cases}$$

### Варіант № 23

$$1. y = \sqrt[5]{1 + xe^{\sqrt{x}}}$$

$$2. y = (2x + 3)^5 + 5^{2x+3}$$

$$3. y = \frac{2^x}{\operatorname{tg}^3 x} + 1$$

$$4. y = (e^{5x} + \cos \sqrt{x})^{\log_5 x}$$

$$5. \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \sin(xy) = y^3$$

$$6. \begin{cases} x = te^t \\ y = \arcsin t + \sin t \end{cases}$$

### Варіант № 24

$$1. y = \ln(x - \sqrt[3]{x}) - x^3 \ln x$$

$$2. y = \cos 3^{x^2} + \left(x^3 + \frac{3}{x}\right)^5$$

$$3. y = \operatorname{tg} \frac{x^2}{x^3 + 1} + 5$$

$$4. y = (1 + \sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}$$

$$5. \operatorname{arctg} y = 2x + \sqrt{y}$$

$$6. \begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t} \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$$

### Варіант № 25

$$1. y = e^{\frac{x}{2}} \operatorname{arctg}^2 x$$

$$2. y = \operatorname{tg} \ln^4 x + 10 \sqrt{\cos \frac{x}{5}}$$

$$3. y = \frac{3^{\operatorname{ctg} x}}{\sqrt{2x^3 + 1}} + (x^3 + e^{3x})^7$$

$$4. y = (3^x + \ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$5. \operatorname{arctg} y = x \sin y$$

$$6. \begin{cases} x = 2t \sin t \\ y = 3 \cos^2 t \end{cases}$$

### Варіант № 26

$$1. y = x^2 (\arcsin 3x)^3$$

$$2. y = 7 \log_2 (e^{\frac{x}{2}} + 1) + 7^{\ln x}$$

$$3. y = \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x}$$

$$4. y = (\operatorname{tg} 7x - x^7)^{\ln^5 x}$$

$$5. y^3 + xy = 1$$

$$6. \begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t \end{cases}$$

### Варіант № 27

$$1. y = \sqrt[6]{x + (\sin \ln x)^3}$$

$$2. y = \frac{e^{3x}}{2x+5} - x \ln(1+x^2)$$

$$3. y = 3 \arcsin^4(\sqrt{x} - 2)^5$$

$$4. y = \operatorname{ctg}(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$$

$$5. \sqrt{x-y^3} = 2 \sin^3 x$$

$$6. \begin{cases} x = 5 \cos^2 t + 1 \\ y = 2 \operatorname{tg} t - 3 \end{cases}$$

### Варіант № 28

$$1. y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$$

$$2. y = 3 \log_7(3^{\ln x} + 5) + \frac{3x}{\ln x}$$

$$3. y = x^2 \operatorname{arctg} x^2 - 2^x$$

$$4. y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$$

$$5. \operatorname{tg}(xy) = 3 \cos(x\sqrt{y})$$

$$6. \begin{cases} x = \sqrt{1+2t} \\ y = 3t^2 \cos^2 \sqrt{t} \end{cases}$$

### Варіант № 29

$$1. y = (2 + \ln 5)^{\operatorname{tg} x} + \sqrt{\frac{x}{\sin x}}$$

$$2. y = \sqrt[3]{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}} - \log_2(5^x - 1)$$

$$3. y = x e^{7x} + (x + e^{7x})^3$$

$$4. y = \left(1 + \sin \frac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$$

$$5. (x^2 + y^2) + \cos \frac{x+y}{x} = 5$$

$$6. \begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t^3 \ln t \end{cases}$$

### Варіант № 30

$$1. y = x \log_5(x^3 + 1) + (\ln 3)^{\cos 2x}$$

$$2. y = \frac{x}{(x^3 + 1)^2} - \operatorname{arctg}^3 \sin 7x$$

$$3. y = 2^{\ln\left(1 + \operatorname{tg}^3 \frac{x}{4}\right)}$$

$$4. y = (3 + \cos \sqrt{x})^{\ln^2 x}$$

$$5. \sqrt{\sin y} + \cos^2(xy^2) = 0$$

$$6. \begin{cases} x = t^3 + 5 \sin t \\ y = t \cos 3t \end{cases}$$

**Завдання 6.** Знайти похідні другого порядку від заданих функцій.

**Варіант № 1**

1.  $y = x\sqrt{1+x^2}$

2.  $e^{xy} = xy$

3.  $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

**Варіант № 2**

1.  $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

2.  $\ln(x+y) - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} = 0$

3.  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \sin^2 t \end{cases}$

**Варіант № 3**

1.  $y = \frac{\ln x}{x}$

2.  $(x+y)^2 + (x-3y)^2 = 0$

3.  $\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 4 \sin^3 t \end{cases}$

**Варіант № 4**

1.  $y = xe^{-x}$

2.  $\ln \frac{x}{y} - x + 2y = 0$

3.  $\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t \\ y = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$

**Варіант № 5**

1.  $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$

2.  $y \sin(x+y) - x = 0$

3.  $\begin{cases} x = 2t^3 + t \\ y = \ln t \end{cases}$

**Варіант № 6**

1.  $y = x^3 e^{-x^2}$

2.  $\operatorname{arctg}(x+y) - x - 2y = 0$

3.  $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{2} \left( t + \frac{1}{t} \right) \end{cases}$

**Варіант № 7**

1.  $y = \sqrt{1+x^2} \arcsin x$

2.  $\operatorname{tg}(x+2y) - 3x + y = 0$

3.  $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left( \frac{t}{t+1} \right)^2 \end{cases}$

**Варіант № 8**

1.  $y = x^2 \ln x$

2.  $y = x + \operatorname{arctg} y$

3.  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$



**Вариант № 9**

1.  $y = xe^{-\frac{1}{x}}$
2.  $\sin(2x + y) + 2x - 3y = 0$
3.  $\begin{cases} x = 2 \ln ctgt \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$

**Вариант № 11**

1.  $y = e^{-x} \sin x$
2.  $tg(x + y) - xy = 0$
3.  $\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = \frac{t^3}{3-t} \end{cases}$

**Вариант № 13**

1.  $y = (5x^2 - 1) \sin 2x$
2.  $x + y = e^{x-y}$
3.  $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

**Вариант № 15**

1.  $y = x^2 e^{2x}$
2.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
3.  $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$

**Вариант № 17**

1.  $y = \frac{1}{3}x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$
2.  $y + \sqrt{x} = \arcsin y$
3.  $\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 4 \ln t \end{cases}$

**Вариант № 10**

1.  $y = x \sin^2 x$
2.  $e^{xy} - (x + 3y) = 0$
3.  $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

**Вариант № 12**

1.  $y = \arcsin^2 x$
2.  $e^x - e^y = y - x$
3.  $\begin{cases} x = \varphi(1 - \sin \varphi) \\ y = \varphi \cos \varphi \end{cases}$

**Вариант № 14**

1.  $y = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2)$
2.  $x^2 + y^2 - xy = 0$
3.  $\begin{cases} x = a \cos t \sqrt{2 \cos 2t} \\ y = a \sin t \sqrt{2 \cos 2t} \end{cases}$

**Вариант № 16**

1.  $y = \frac{x^2}{1-x}$
2.  $x \ln y - y \ln x = 1$
3.  $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$

**Вариант № 18**

1.  $y = \frac{x^2}{4}(2 \ln x + 3)$
2.  $x - y^2 = \cos(xy)$
3.  $\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

**Вариант № 19**

1.  $y = -\frac{1}{9}x \sin 3x - \frac{2}{27} \cos 3x$

2.  $xe^y + x^2 = 10$

3. 
$$\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t} \\ y = \sqrt{t-t^2} \end{cases}$$

**Вариант № 21**

1.  $y = \ln \sqrt[3]{1+x^2}$

2.  $xy = \operatorname{ctg} y$

3. 
$$\begin{cases} x = 1 + e^{3\varphi} \\ y = 3\varphi + e^{-3\varphi} \end{cases}$$

**Вариант № 23**

1.  $f(x) = (3x^2 + 4)e^x$

2.  $y = \cos(x+y)$

3. 
$$\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}$$

**Вариант № 25**

1.  $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

2.  $e^y + xy = e$

3. 
$$\begin{cases} x = 2 \ln \operatorname{ctg} \frac{t}{2} - 2 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

**Вариант № 20**

1.  $y = e^{-x} \cos 3x$

2.  $\ln y + \frac{y}{x} = 0$

3. 
$$\begin{cases} x = \sqrt{1+t^2} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

**Вариант № 22**

1.  $f(x) = \operatorname{arctg} \ln x$

2.  $x^2 - 2xy^2 + 1 = 0$

3. 
$$\begin{cases} x = t \ln t \\ y = \frac{\ln t}{t} \end{cases}$$

**Вариант № 24**

1.  $f(x) = \ln(2x^2 + 7)$

2.  $y^3 + x^3 - 3xy = 0$

3. 
$$\begin{cases} x = e^{-t^2} \\ y = \operatorname{arctg}(2t+1) \end{cases}$$

**Вариант № 26**

1.  $y = \frac{x}{2} \sqrt{2-x^2} + \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}$

2.  $y^2 - 2xy + 3 = 0$

3. 
$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^2} \\ y = \frac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

**Варіант № 27**

1.  $y = (\arctg x)^2$

2.  $y = x + \ln y$

3. 
$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases}$$

**Варіант № 29**

1.  $f(x) = e^{2x} \sin 5x$

2.  $y^3 - 3y + 3x = 1$

3. 
$$\begin{cases} x = \frac{2t}{1+t^2} \\ y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

**Варіант № 28**

1.  $y = \frac{1}{1+x^3}$

2.  $\cos(xy) = x$

3. 
$$\begin{cases} x = 4tg^2 \frac{t}{2} \\ y = 2 \sin t + 3 \cos t \end{cases}$$

**Варіант № 30**

1.  $y = \arcsin \frac{x}{2}$

2.  $x^3 + x^2 y + y^2 = 0$

3. 
$$\begin{cases} x = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \\ y = \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \end{cases}$$

**Завдання 7.** Знайти границі функцій за правилом Лопіталя.

**Варіант № 1**

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{\sin(x-2)}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\sin x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \arctg x \right)^x$

**Варіант № 3**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tgx - x}{x - \sin x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (1-x)tg \frac{\pi}{2} x \right]$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

**Варіант № 2**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)}$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x^2}$

**Варіант № 4**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(1+x)}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( tgx - \frac{1}{1 - \sin x} \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

**Варіант № 5**

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 2 \ln x}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} [\sin(2x - 1) \operatorname{tg} \pi x]$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$

**Варіант № 7**

1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 2x)}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} x \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}$

**Варіант № 9**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[ \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \right]$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1+0} (x - 1)^{\frac{3}{\ln(2x-2)}}$

**Варіант № 11**

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + x^2)}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cos 5x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln^2 x}}$

**Варіант № 6**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}$

**Варіант № 8**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x^2)}{x^2 \sin x^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{4x}{x-2} - \frac{1}{4-x^2} \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

**Варіант № 10**

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{2+x} + x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x \left( e^{\frac{3}{x}} - 1 \right) \right]$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{\cos x}}$

**Варіант № 12**

1.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) \operatorname{ctg} x$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

**Варіант № 13**

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 2x) \operatorname{ctg} 4x$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + x)^{\frac{1}{3x}}$

**Варіант № 15**

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\operatorname{ctg} x}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$

**Варіант № 17**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{5}{x^5 - 1} - \frac{7}{x^7 - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{5}{1+2 \ln x}}$

**Варіант № 19**

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x - \ln x}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{ctg} 3x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

**Варіант № 14**

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$

**Варіант № 16**

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$
- $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x)^{\frac{1}{\ln(e^{3x} - 1)}}$

**Варіант № 18**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x}{x-2} - \frac{1}{\ln \frac{x}{2}} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$

**Варіант № 20**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{1 - \cos x}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} ((1 - e^{5x}) \operatorname{ctg} x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)^{\sin \frac{x-1}{2}}$

**Варіант № 21**

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \operatorname{arctg} x^2 - \pi}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} [(1 - \cos x) \operatorname{ctg} x]$
- $\lim_{x \rightarrow +0} [\ln(x + e)]^{\frac{1}{x}}$

**Варіант № 23**

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sin \frac{1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^4}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

**Варіант № 25**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{\ln\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

**Варіант № 27**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\ln^2 x}$

**Варіант № 22**

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{6} x}{1 - x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{3x}$

**Варіант № 24**

- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$
- $\lim_{x \rightarrow 1+0} [\ln x \ln(x-1)]$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x$

**Варіант № 26**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x \operatorname{tg} x} - 2}{x^2 - x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} (x^2 \ln x)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{2}{x^2 - 1}}$

**Варіант № 28**

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin^2 x}{\sin 2x - x^3}$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{3}{x-2}}$

**Варіант № 29**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln 4x}{\ln \sin 5x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\pi - 2 \arctg x) \ln x]$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{1+5 \ln x}}$

**Варіант № 30**

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \ln(1+2x)}{x^2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x \operatorname{tg} x} \right)$

3.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{5}{x^2-4}}$

**Завдання 8.** Скласти рівняння дотичної та нормалі, проведених до кривої ( $n$  - номер варіанта).

а)  $y = ne^{\frac{x}{n}}$  у точці перетину з віссю  $Oy$ ;

б)  $x^2 + y^2 - nx + \frac{n}{2}y - n^2 = 0$  у точках її перетину з віссю  $Ox$ ;

в)  $\begin{cases} x = nt - \sin nt \\ y = 1 - \cos nt \end{cases}$  у точці, де  $t = \frac{\pi}{2n}$ .

**Завдання 9.** Знайти найбільше та найменше значення функції  $y = f(x)$  на відрізьку  $[a; b]$ .

1.  $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$ ,  $[0; 3]$

2.  $y = \frac{3x}{x^2 + 1}$ ,  $[0; 5]$

3.  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ ,  $[-0, 5; 0]$

4.  $y = (x+2)e^{1-x}$ ,  $[-2; 2]$

5.  $y = \ln(x^2 - 2x + 4)$ ,  $[-1; 1, 5]$

6.  $y = \frac{x^3}{x^2 - x + 1}$ ,  $[-1; 1]$

7.  $y = \left( \frac{x+1}{x} \right)^3$ ,  $[1; 2]$

8.  $y = \sqrt{x - x^3}$ ,  $[-2; 2]$

9.  $y = 4 - e^{-x^2}$ ,  $[0; 1]$

10.  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ ,  $[1; 2]$

11.  $y = xe^x$ ,  $[-2; 0]$

12.  $y = (x-2)e^x$ ,  $[-2; 1]$

16.  $y = e^{4x-x^2}$ ,  $[1; 3]$

17.  $y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$ ,  $[-3; -1]$

18.  $y = \frac{(e^{2x} + 1)}{e^x}$ ,  $[-1; 2]$

19.  $y = x \ln x$ ,  $[e^{-2}; 1]$

20.  $y = x^3 e^{x+1}$ ,  $[-4; 0]$

21.  $y = x^2 - 2x + 2(x-1)^{-1}$ ,  $[-1; 3]$

22.  $y = (x+1)\sqrt[3]{x^2}$ ,  $\left[-\frac{4}{5}; 3\right]$

23.  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,  $[1; 4]$

24.  $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$ ,  $[-3; 1]$

25.  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ ,  $[-1; 2]$

26.  $y = (3-x)e^{-x}$ ,  $[0; 5]$

27.  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x$ ,  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

13.  $y = (x-1)e^{-x}$ ,  $[0; 3]$

28.  $y = 108x - x^4$ ,  $[-1; 4]$

14.  $y = \frac{x}{9-x^2}$ ,  $[-2; 2]$

29.  $y = 0,25x^4 - 6x^3 + 7$ ,  $[16; 20]$

15.  $y = \frac{1+\ln x}{x}$ ,  $[e^{-1}; e]$

30.  $y = e^{6x-x^2}$ ,  $[-3; 3]$

**3 ВАРІАНТИ ПІДСУМКОВОГО ЗАВДАННЯ**

Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графік.

**Варіант № 1**

1.  $y = \frac{x}{x^2+1}$

2.  $y = \frac{e^x}{x}$

3.  $y = x^2\sqrt{x+1}$

**Варіант № 2**

1.  $y = \frac{(x-2)^2}{x^3-1}$

2.  $y = \ln(2x^2+3)$

3.  $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

**Варіант № 3**

1.  $y = \frac{x}{(x-1)^2}$

2.  $y = x^3e^{-x}$

3.  $y = \sqrt[3]{x^2-x^3}$

**Варіант № 4**

1.  $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$

2.  $y = x + 2\text{arcsctg}x$

3.  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

**Варіант № 5**

1.  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

2.  $y = x - \ln(x+1)$

3.  $y = \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}$

**Варіант № 6**

1.  $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$

2.  $y = x - 2\text{arctg}x$

3.  $y = (x^2-1)\sqrt{x+1}$

**Варіант № 7**

1.  $y = \frac{x^3+16}{x}$

2.  $y = \frac{1}{e^{2x}-1}$

3.  $y = x\sqrt[3]{(x+1)^2}$

**Варіант № 8**

1.  $y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$

2.  $y = x^2 \ln x$

3.  $y = -\frac{8+x^2}{\sqrt{x^2-4}}$



**Вариант № 9**

1.  $y = \frac{x^3 - 1}{4x^2}$

2.  $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$

3.  $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

**Вариант № 11**

1.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$

2.  $y = x + \ln(x^2 - 4)$

3.  $y = \frac{3x^2 - 10}{\sqrt{4x^2 - 1}}$

**Вариант № 13**

1.  $y = \frac{x^3 - 8}{2x^2}$

2.  $y = x^2 e^{-x}$

3.  $y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}$

**Вариант № 15**

1.  $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$

2.  $y = x e^{-x^2}$

3.  $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}$

**Вариант № 17**

1.  $y = \frac{12x}{x^2 - 36}$

2.  $y = \ln(x^2 + 2x + 2)$

3.  $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{4x^2 - 3}}$

**Вариант № 10**

1.  $y = \frac{2}{x^2 + x + 1}$

2.  $y = x - 2 \ln x$

3.  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}}$

**Вариант № 12**

1.  $y = x + \frac{x}{3x-1}$

2.  $y = (x^2 + 1)e^x$

3.  $y = x\sqrt{(x+1)^3}$

**Вариант № 14**

1.  $y = \frac{4x}{4 + x^2}$

2.  $y = \ln \frac{x}{x-1}$

3.  $y = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$

**Вариант № 16**

1.  $y = \frac{1}{2x + x^2}$

2.  $y = (x + 4)e^{2x}$

3.  $y = \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}}{x^2}$

**Вариант № 18**

1.  $y = \frac{x^3}{x^2 + 9}$

2.  $y = x \arctg x$

3.  $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$

**Вариант № 19**

1.  $y = \frac{4x^3 + 5}{x}$

2.  $y = \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$

3.  $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

**Вариант № 21**

1.  $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

2.  $y = x + e^{-x}$

3.  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

**Вариант № 23**

1.  $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

2.  $y = \ln \cos x$

3.  $y = \frac{2-x^2}{\sqrt{9x^2-4}}$

**Вариант № 25**

1.  $y = \frac{8}{x^2(x-4)}$

2.  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

3.  $y = \sqrt[3]{x^2(3-x)}$

**Вариант № 27**

1.  $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

2.  $y = (x^2 + 4)e^{-x^2}$

3.  $y = \sqrt[3]{x^3 - 4x}$

**Вариант № 20**

1.  $y = \frac{x^3 - 27}{(x-3)^2}$

2.  $y = e^{\frac{1}{2-x}}$

3.  $y = \frac{x^2 - 3}{\sqrt{3x^2 - 2}}$

**Вариант № 22**

1.  $y = \frac{9x^2}{x^3 + 1}$

2.  $y = x \ln x$

3.  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{2-x}$

**Вариант № 24**

1.  $y = \frac{x^2}{x^2 + 4}$

2.  $y = \ln(1 + e^{-x})$

3.  $y = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$

**Вариант № 26**

1.  $y = \frac{x^2 - 5}{x-3}$

2.  $y = \frac{e^x}{e^x - 1}$

3.  $y = \frac{x^2 + 16}{\sqrt{9x^2 - 8}}$

**Вариант № 28**

1.  $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$

2.  $y = x \ln^2 x$

3.  $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}$

**Варіант № 29**

1.  $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$

2.  $y = \frac{1+\ln x}{x}$

3.  $y = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-2}}$

**Варіант № 30**

1.  $y = \frac{x^4+3}{x}$

2.  $y = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

3.  $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$

**4 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ПІДСУМКОВОГО ЗАВДАННЯ**

**Завдання 1.** Дослідити функцію  $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$  та побудувати її графік.

**1** Область визначення:  $x \neq \pm 1$ , тобто  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ .

**2** Функція є парною:  $y(-x) = \frac{1+(-x)^2}{1-(-x)^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2} = y(x)$ , тобто виконується

рівність  $y(-x) = y(x)$ , одже, графік функції симетричний відносно осі  $Oy$ .

**3** Точки перетину з осями координат:

з віссю  $Oy$ :  $x = 0$   $y(0) = \frac{1+0^2}{1-0^2} = 1$ , т.е.  $A(0;1)$  – точка перетину з  $Oy$ ;

з віссю  $Ox$ :  $y = 0$ , рівняння  $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$  не має розв'язків, тобто графік функції

не перетинає вісь  $Ox$ .

**4** Поведінка функції на нескінченності.

Обчислюємо  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -1$ , тобто пряма  $y = -1$  – горизонтальна асимптота при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**5** Пряма  $x = 1$  – вертикальна асимптота, так як

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty;$$

пряма  $x = -1$  теж є вертикальною асимптотою, так як графік функції симетричний відносно осі  $Oy$ , або

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = -\infty \quad \text{і} \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1+x^2}{1-x^2} = +\infty.$$

Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються за допомогою рівняння  $y = kx + b$ .

Знайдемо параметри  $k$  і  $b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{x(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{1-3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1+x^2}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$$

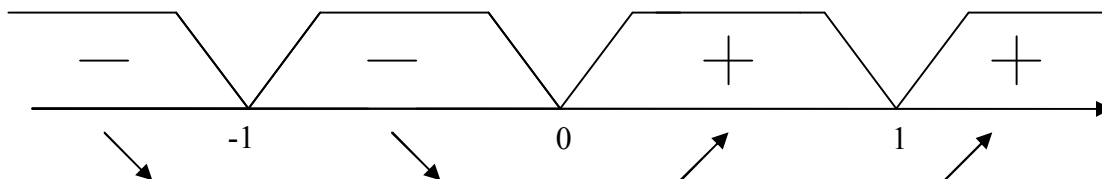
Таким чином, отримаємо рівняння похилої асимптоти у вигляді  $y = -1$ .

### 6 Інтервали монотонності та екстремуми.

Знайдемо  $y'(x)$ : 
$$y' = \frac{2x(1-x^2) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2};$$

$y' = 0$ , якщо  $x = 0$  та  $y'$  не існує, якщо  $x = \pm 1$ , тобто критичною є тільки точка  $x = 0$ , оскільки точка  $x = \pm 1$  не належить до області визначення функції.

$y'$



На інтервалах  $(-\infty; -1)$  та  $(-1; 0)$  функція спадає, оскільки тут  $y'(x) < 0$ .

На інтервалах  $(0; 1)$  та  $(1; +\infty)$  функція зростає, оскільки тут  $y'(x) > 0$ .

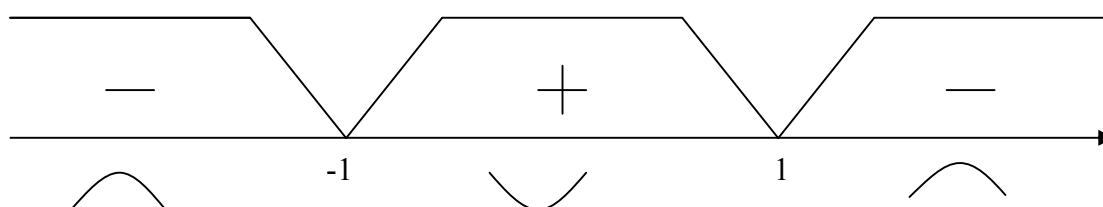
$y_{\min} = y(0) = 1$ , тобто точка  $B(0; 1)$  – екстремальна.

### 7 Інтервали опуклості й угнутості та точки перегину.

Знайдемо  $y''(x)$

$$y''(x) = (y'(x))' = \left( \frac{4x}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{4 \cdot (1-x^2)^2 - 4x \cdot 2 \cdot (1-x^2) \cdot (-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$$

$y''$

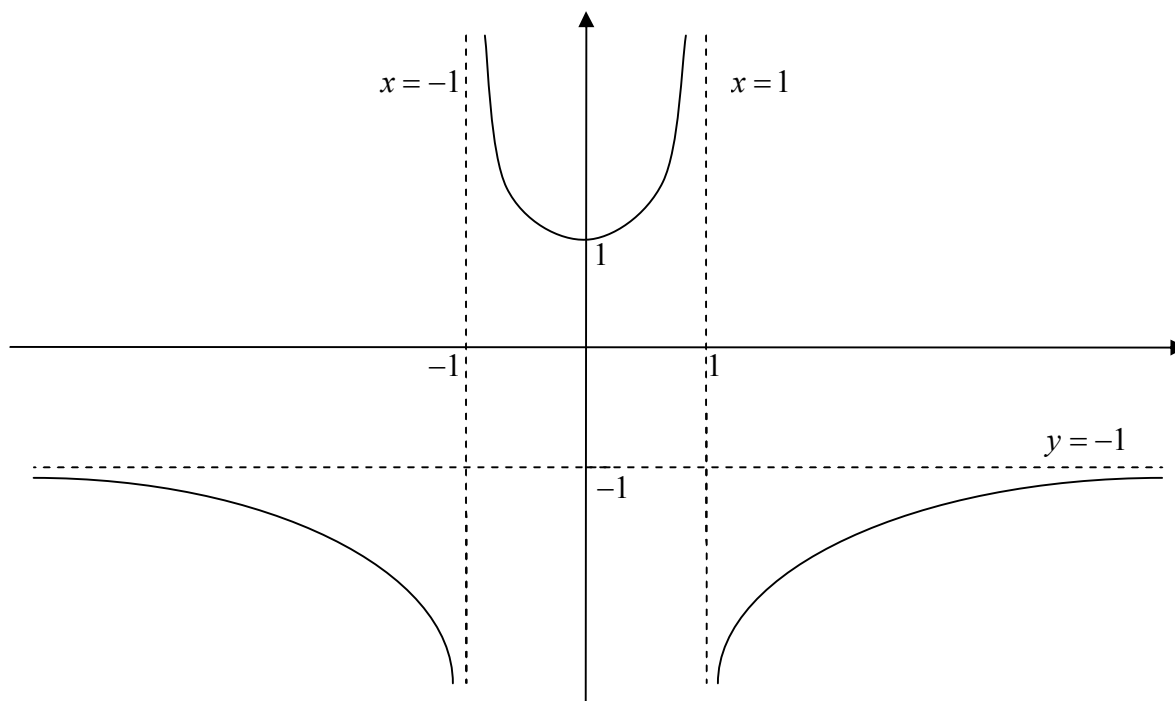


На інтервалах  $(-\infty; -1)$  та  $(1; +\infty)$  графік функції опуклий, так як тут  $y''(x) < 0$ .

На інтервалі  $(-1; 1)$  графік функції угнутий, так як  $y''(x) > 0$ .

Точок перегину немає.

Будуємо графік функції:



**Завдання 2.** Дослідити функцію  $y = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$  та побудувати її графік.

**1** Область визначення:  $x \in \mathbb{R}$ ; тобто  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .

**2** Функція загального вигляду, так як  $y(-x) \neq \pm y(x)$ .

**3** Точки перетину з осями координат:

з віссю  $Oy$ :  $x = 0$   $y(0) = \sqrt[3]{0^3 - 2 \cdot 0^2} = 0$ , тобто  $A(0;0)$  - точка перетину з  $Oy$ .

з віссю  $Ox$ :  $y = 0$ , рівняння  $0 = y(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}$  має розв'язок  $x = 0$  та  $x = 2$ , тобто  $A(0;0)$  та  $B(2;0)$  - точки перетину з  $Ox$ .

**4** Поведінка функції коли  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Обчислюємо:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x^2} = \pm\infty$ .

**5** Знайдемо похилі асимптоти, які визначаються рівнянням

$y = kx + b$ .

Знайдемо параметри  $k$  і  $b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}}}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left( \sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} - 1 \right) = (\infty \cdot 0) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}} \cdot \left( -\left(-\frac{2}{x^2}\right) \right)}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^2}} = -\frac{2}{3}.$$

Таким чином, отримуємо рівняння похилої асимптоти у вигляді

$$y = x - \frac{2}{3} \quad \text{або} \quad 3y - 3x + 2 = 0.$$

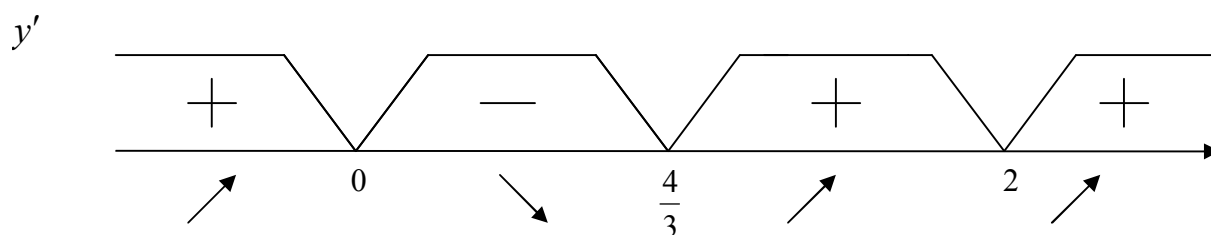
Вертикальних асимптот графік функції не має, оскільки  $D(y) = (-\infty; +\infty)$ .

**6** Для дослідження функції на монотонність та екстремуми знайдемо  $y'(x)$ :

$$y' = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} \cdot (3x^2 - 4x) = \frac{3x^2 - 4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}};$$

$y' = 0$ , якщо  $x = 0$  і  $x = \frac{4}{3}$ ,  $y'$  не існує, якщо  $x = 0$  та  $x = 2$ .

Критичні точки:  $x = 0$ ,  $x = \frac{4}{3}$  і  $x = 2$ . Точка  $x = 2$  - не екстремальна, оскільки  $y'$  не змінює знак під час проходження через цю точку.



На інтервалі  $\left(0; \frac{4}{3}\right)$  функція спадає, оскільки тут  $y'(x) < 0$ .

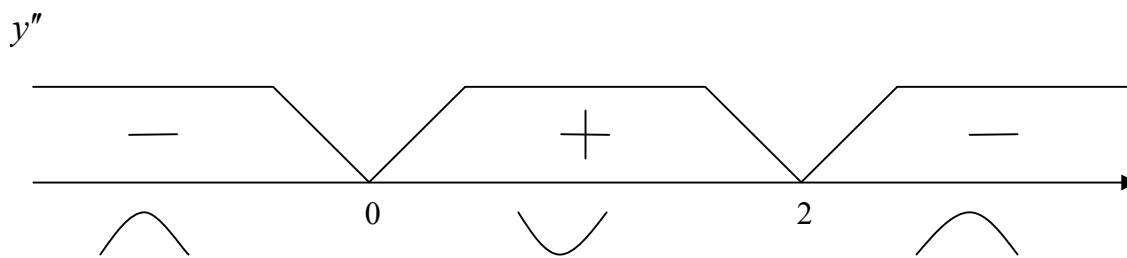
На інтервалах  $(-\infty; 0)$  і  $\left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$  функція зростає, оскільки тут  $y'(x) > 0$ .

$$y_{\min} = y\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{3} \cong -1,058, \quad \text{тобто} \quad C\left(\frac{4}{3}; -\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{3}\right) - \text{точка мінімуму.}$$

$$y_{\max} = y(0) = 0, \quad \text{тобто} \quad G(0; 0) - \text{точка максимуму.}$$

**7** Для дослідження функції на опуклість та угнутість та на наявність точок перегину знайдемо  $y''(x)$ :

$$\begin{aligned} y''(x) &= (y'(x))' = \left( \frac{3x^2 - 4x}{3 \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{(6x - 4) \cdot \sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^2} - (3x^2 - 4x) \cdot \frac{2 \cdot (3x^2 - 4x)}{3 \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2}}}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^4}} = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-\frac{8}{3}x^2}{\sqrt[3]{(x^3 - 2x^2)^5}} = -\frac{8}{9} \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 2x^2}} \end{aligned}$$

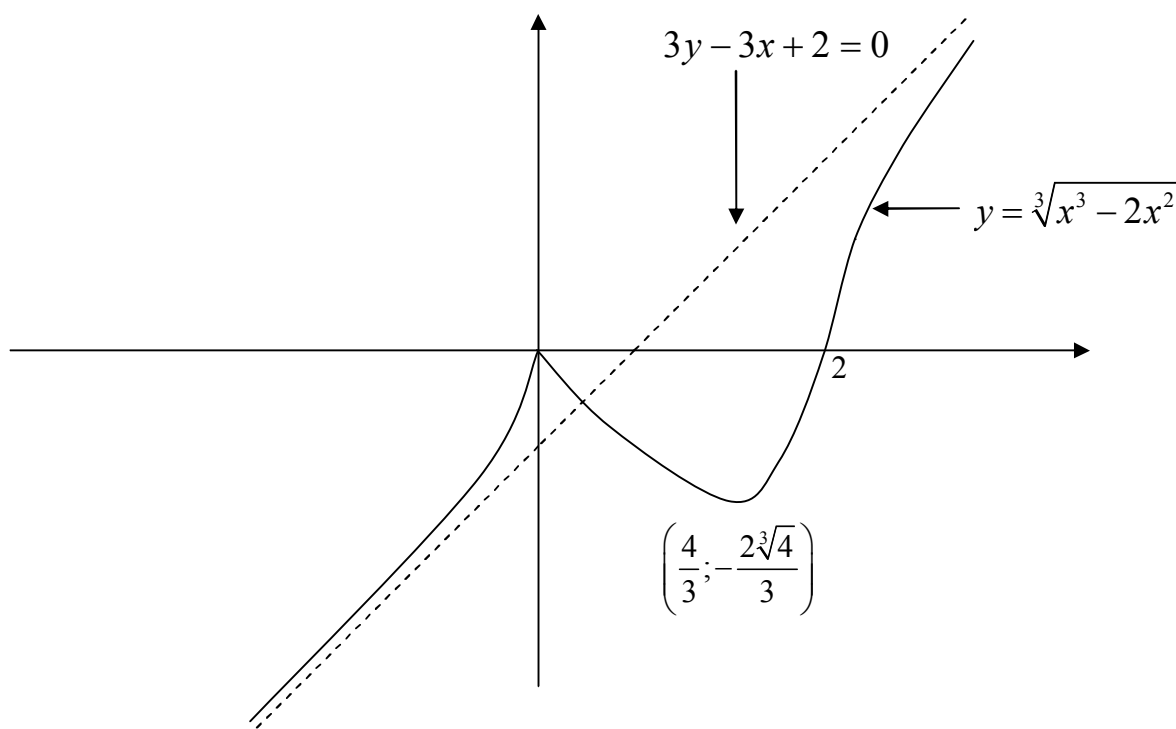


На інтервалах  $(-\infty; 0)$  і  $(0; 2)$  графік функції угнутий, оскільки тут  $y''(x) > 0$ .

На інтервалі  $(2; +\infty)$  графік функції опуклий, оскільки тут  $y''(x) < 0$ .

Під час проходження через точку  $x=2$  друга похідна змінює знак, отже,  $(2; y(2)) = (2; 0)$  – точка перегину.

Будуємо графік функції:



## 5 ВАРІАНТ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЮ ТА ЗРАЗОК ЙОГО ВИКОНАННЯ

### Варіант МК

#### Частина перша (тестова)

1 Яка з даних функцій є явно заданою в декартовій системі координат  $xOy$ ?

А)  $y = \sin(xy) + 1$ ; Б)  $y = e^{x-2} + 3$ ; В)  $r = 5 \cos \varphi$ ; Г)  $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 7t + 1 \end{cases}$ .

2 Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 5x + 3}{2x^2 - 3x + 1}$ .

А) 8; Б)  $\infty$ ; В) 0; Г) 4.

3 Функція  $y = \frac{x}{x+2}$  в точці  $x = 2$

А) терпить усувний розрив I роду;

Б) терпить неусувний розрив I роду;

В) терпить розрив I I роду;

Г) є неперервною

4 Похідною функції  $y = f(x)$  у точці  $x \in$

А)  $y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ;

Б)  $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ;

В)  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y}{\Delta x}$ ;

Г)  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (якщо границя існує).

5 Обчисліть  $f'(x)$ , якщо  $f(x) = 3\cos(2x) + 4x - 9$ .

А)  $2x + 3$ ;

Б)  $3\sin(2x) + 4x - 7$ ;

В)  $-6\sin(2x) + 4$ ;

Г) 2.

6 Якщо  $f'(x) = 7x^2 + 1$  в  $D(f)$ , то функція  $f(x)$  в  $D(f)$

А) монотонна;

Б) має точки розриву;

В) має екстремуми;

Г) стала.

7 Графік функції  $y = x^4 - 2x + 3$  є:

А) всюди опуклим;

Б) всюди угнутим;

при  $x \in (-\infty, 0)$  опуклим.

при  $x \in (-\infty, 0)$  угнутим.

В) при  $x \in (0; \infty)$  угнутим.

Г) при  $x \in (0; \infty)$  опуклим.

### Частина друга

1 Достатня умова зростання функції  $y = f(x)$  на проміжку(з доведенням).

2 Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos x}$ .

3 Знайти екстремуми функції:  $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$

**Розв'язання:**

### Частина перша (тестова)

1

1	2	3	4	5	6	7
Б	Б	Г	Г	В	А	А

2  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 5x + 3}{2x^2 - 3x + 1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$  (за правилом Лопітала)  $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{24x^2 - 5}{4x - 3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{48x}{4} = \infty$ .

3  $\lim_{x \rightarrow 2-0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} y = y(2) = \frac{1}{2}$ , тобто за означенням функція неперервна в

точці  $x = 2$ .



4  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (якщо границя існує).

5  $f'(x) = -6 \sin(2x) + 4$ .

6 Функція  $f(x)$  не є сталою, оскільки її похідна залежить від аргументу  $x$ .  
 $f'(x) > 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , тобто функція зростає в  $D(y) = \mathbb{R}$  і не має екстремуму.

7  $D(y) = \mathbb{R}$ .

$y' = 4x^3 - 2$ ,  $y''(x) = 12x^2$ ;

$y''(x) > 0$  при  $x \in \mathbb{R}$ , тобто графік функції  $y = f(x)$  є всюди опуклим.

### Частина друга

1 Достатня умова зростання функції  $y = f(x)$  на проміжку.

**Теорема.** Якщо похідна диференційованої на проміжку  $[a; b]$  функції, додатна для  $a < x < b$ , то функція зростає на цьому проміжку.

**Доведення.**

Нехай  $f'(x) > 0$ , де  $a < x < b$ .

Розглянемо будь-які значення  $x_1$  та  $x_2 \in [a; b]$  такі, що  $x_1 < x_2$ . За теоремою Лагранжа про скінченні прирости маємо:  $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ , де  $\xi \in (x_1; x_2)$ .  
 За умовою  $f'(\xi) > 0$ , звідси випливає, що  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , а це означає, що  $f(x)$  – зростаюча функція.

Теорему доведено.

2 Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos x}$ .

Перший спосіб:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos x} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot \sin x \cdot \cos x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x \cdot \sin x \cdot \cos x} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4} \end{array} \right\} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Другий спосіб:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin x \cdot \cos x} &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x} = (\text{за правилом Лопіталя}) = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{\sin 2x + 2x \cos 2x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \cos x}{\sin 2x + 2x \cdot \cos 2x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x}{2 \cos 2x + 2 \cos 2x - 4x \sin 2x} = 3 \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

3 Знайти екстремуми функції  $y = \ln \frac{x+1}{x+2}$

$$D(y): \frac{x+1}{x+2} > 0$$

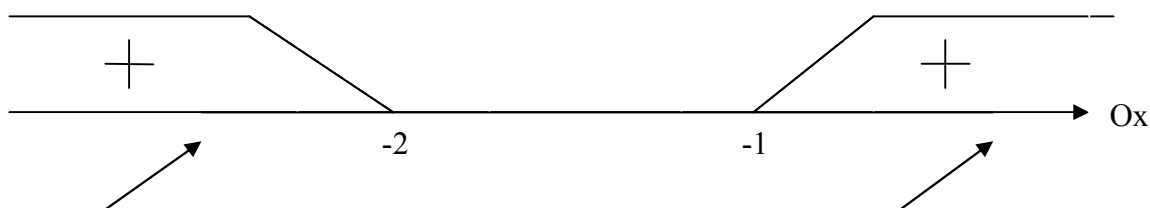
$$(x+1)(x+2) > 0$$

$$x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$$

$$y'(x) = \frac{(x+2)(x+2-x-1)}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)}.$$

Критичних точок функція не має, оскільки  $y'(x) > 0$  при  $x \in D(y)$ , тобто функція скрізь зростає в області визначення. Екстремумів функція не має.

Для  $y'(x)$  маємо:



## 6 ПЕРЕЛІК ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

### Варіант 1

1.1 Яка з даних функцій є явно заданою в декартовій системі координат  $xOy$ ?

А)  $y = \sin(xy) + 1$ ; Б)  $y = e^{x-2} + 3$ ; В)  $r = 5 \cos \varphi$ ; Г)  $\begin{cases} x = 5t + 1 \\ y = 7t + 1 \end{cases}$ .

1.2 Яка з даних функцій є неявно заданою в декартовій системі координат  $xOy$ ?

А)  $y = \cos(x+2y) - 3$ ; Б)  $y = x + 2$ ; В)  $r = 3 \cos \varphi$ ; Г)  $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = 7t^2 + 1 \end{cases}$ .

1.3 Яка з даних функцій є параметрично заданою?

А)  $y = 3x + 1$ ; Б)  $y = \operatorname{tg}(x + y) + 2$ ; В)  $r = \sin 3\varphi$ ;

$$\Gamma) \begin{cases} x = t/3 + 1 \\ y = 7t + 1 \end{cases}.$$

1.4. Дано функцію  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 1} - 2$ . Знайдіть  $f(0)$ .

А) 3; Б) -3; В) 0;

Г) 4.

1.5 Визначте, які з наданих функцій є парними

А)  $f(x) = x^3 - x$ ; Б)  $f(x) = x^3 - 3x^2$ ; В)  $f(x) = x^2 - \frac{4}{x^4}$ ; Г)  $f(x) = \frac{5}{x - 3}$ .

1.6 Визначте, які з наданих функцій є не парними

А)  $f(x) = 3 - x^3 + x$ ; Б)  $f(x) = x^3 - 3x + 2$ ;

В)  $f(x) = 5 - 3x^2$ ; Г)  $f(x) = 2 - \frac{5}{x - 3}$ .

1.7 Назвіть координати точки перетину графіка функції  $f(x) = \ln(x - 1)$  з віссю абсцис?

А) (0;1); Б) (1; 0); В) (1;1); Г) (0;0).

1.8 Назвіть координати точки перетину графіка функції  $f(x) = x^2 - 3x + 5$  з віссю ординат?

А) (0;0); Б) (5; 0); В) (0;5); Г) (5;5).

1.9 Знайдіть область визначення функції  $y = \frac{x}{\sqrt{3 - x}}$ .

А)  $(3; \infty)$ ; Б)  $[3; \infty)$ ; В)  $(-3; \infty)$ ; Г)  $(-\infty; 3]$ .

1.10 Знайдіть область визначення функції  $y = \frac{5x}{x - 2}$ .

А)  $(2; \infty)$ ; Б)  $[2; \infty)$ ; В)  $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$ ; Г)  $(-\infty; 2]$ .

2.1 Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^3 - 5x + 3}{2x^2 - 3x + 1}$ .

А) 8; Б)  $\infty$ ; В) 0; Г) 4.

2.2 Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3}$ .

А) 2; Б)  $\infty$ ; В)  $\frac{1}{2}$ ; Г) 0.

2.3 Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(5x - 2) + 3x)$ .

А) 8; Б)  $+\infty$ ; В) 3; Г) 4.

2.4 Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{2x}$ .

А) 3; Б)  $\infty$ ; В)  $\frac{3}{2}$ ; Г) 1.

2.5 Обчисліть  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 7}{3 - 5x^3}$ .

А)  $\frac{3}{5}$ ; Б)  $\infty$ ; В) 3; Г)  $-\frac{3}{5}$ .



### 3.6 З наданих функцій

- 1)  $y = \sin x - 1$ ; 2)  $y = \cos x$ ; 3)  $y = \operatorname{tg} x$ ; 4)  $y = e^x$ ; 5)  $y = \sin x$ .

еквівалентними нескінченно малими при  $x \rightarrow 0$  є:

- А) 1 і 3; Б) 2 і 4; В) 3 і 5; Г) 1 і 4.

3.7 Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , то функція  $y = f(x)$  у точці  $x = a$  є:

- А) нескінченно великою; Б) нескінченно малою;  
В) обмеженою; Г) сталою.

3.8 Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , то функція  $y = f(x)$  у точці  $x = a$  є:

- А) нескінченно великою; Б) нескінченно малою;  
В) необмеженою; Г) обов'язково неперервною.

3.9 Які з пар функцій  $f(x)$  і  $g(x)$  є еквівалентними нескінченно малими при  $x \rightarrow 0$ ?

- А)  $f(x) = x$ ;  $g(x) = \cos x$ ; Б)  $f(x) = x$ ;  $g(x) = \sin x$ ; В)  $f(x) = x + 2$ ;  $g(x) = \sin x$ ; Г)  $f(x) = x$ ;  $g(x) = e^x$ .

3.10 Будь-яка неперервна на  $[a; b]$  функція  $f(x)$ :

- А) диференційована на  $[a; b]$ ; Б) обмежена на  $[a; b]$ ;  
В) має корінь на  $[a; b]$ ; Г) монотонна на  $[a; b]$

4.1 Похідною функції  $y = f(x)$  у точці  $x$  є:

- А)  $y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ; Б)  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y}{\Delta x}$ ;  
В)  $y' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ; Г)  $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  (якщо границя існує).

4.2 Якщо  $u(x)$  і  $v(x)$  - диференційовані в точці  $x$ , то похідна їх добутку обчислюється за формулою:

- А)  $(uv)' = u'v'$ ; Б)  $(uv)' = u'v' + uv$ ;  
В)  $(uv)' = u'v + uv'$ ; Г)  $(uv)' = u'v - uv'$ .

4.3 Якщо  $u(x)$  та  $v(x)$  - диференційовані в точці  $x$ , то похідна їх частки обчислюється за формулою:

- А)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v'}$ ; Б)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ;  
В)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$ ; Г)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{uv' - u'v}{v^2}$ .

4.4 Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції  $y = \sin 5x$  в точці  $x = 0$  дорівнює:

- А) 1; Б)  $5 \sin 5x$ ; В) 5; Г) 0.

4.5 Шлях, пройдений тілом, заданий рівнянням  $s(t) = 7t^2 + 2$  (м). Знайдіть швидкість тіла через 2 секунди після початку руху.

- А) 2 м/с; Б) 28 м/с; В) 14 м/с; Г) 10 м/с.

5.1 Обчисліть  $f'(x)$ , якщо  $f(x) = e^{2x} + 2x^3 + 3x - 7$ .

- А)  $2x + 3$ ; Б)  $e^{2x} + 6x + 3$ ; В)  $2e^{2x} + 6x^2 + 3$ ; Г) 2.

5.2 Обчисліть  $f'(x)$ , якщо  $f(x) = 3\cos(2x) + 4x - 7$ .

- А)  $2x + 3$ ;      Б)  $3\sin(2x) + 4x - 7$ ;      В)  $-6\sin(2x) + 4$ ;      Г) 2.

5.3 Обчисліть  $f'(x)$ , якщо  $f(x) = \ln(7x) + 2x^3 + 3x - 7$ .

- А)  $3x + 3$ ;      Б)  $\frac{1}{x} + 6x + 3$ ;      В)  $\frac{1}{x} + 6x^2 + 3$ ;      Г)  $2x - 7$ .

5.4 Обчисліть  $(f(x) \cdot g(x))'$ , якщо  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x^2$ .

- А)  $2x$ ;      Б)  $3x$ ;      В)  $3x^2$ ;      Г) 1.

5.5 Обчисліть диференціал функції  $y = 5x^3 + 2$ .

- А)  $15x$ ;      Б)  $15x^2$ ;      В)  $15x^2 dx$ ;      Г) 0.

6.1 Якого найменшого значення набуває функція  $y = x^4 - 1$  на відрізку  $[-1; 1]$ ?

- А) 0;      Б) 1;      В)  $-1$ ;      Г)  $-2$ .

6.2 Якого найбільшого значення набуває функція  $y = x^4 - 1$  на відрізку  $[-1; 1]$ ?

- А) 0;      Б) 1;      В)  $-1$ ;      Г)  $-2$ .

6.3 Якщо  $f'(x) = 7x^2 + 1$  в  $D(f)$ , то функція  $f(x)$  в  $D(f)$ :

- А) монотонна;      В) має екстремуми;  
Б) має точки розриву;      Г) стала.

6.4 Для функції  $y = 7x^4 - 3$  точка  $x = 0$  є:

- А) точкою максимуму;      Б) точкою мінімуму;  
В) точкою розриву;      Г) критичною, але не екстремальною.

6.5 Функція  $y = 5^{3x+1} + 4x - 1$  для всіх дійсних чисел є:

- А) сталою;      Б) зростаючою;  
В) спадаючою;      Г) незростаючою.

6.6 Функція  $y = -2x^7 - 4x - 5$  для всіх дійсних чисел є:

- А) сталою;      Б) зростаючою;  
В) спадаючою;      Г) неспадаючою.

6.7 Для функції  $y = 7x^5 + 4$  точка  $x = 0$  є:

- А) точкою максимуму;      Б) точкою мінімуму;  
В) точкою розриву;      Г) критичною, але не екстремальною.

6.8 Функція  $y = 2x^4 + 4$  на проміжку  $(0; \infty)$  є:

- А) сталою;      Б) зростаючою в О.В.;  
В) спадаючою в О.В.;      Г) неспадаючою в О.В.

6.9 Для функції  $y = 3x^6 + 4$  точка  $x = 0$  є:

- А) точкою максимуму;      Б) точкою мінімуму;  
В) точкою розриву;      Г) критичною, але не екстремальною.

6.10 Знайдіть критичні точки функції  $y = 5x^2 + 3$ .

- А)  $x = 1$ ;      Б)  $x = 0$ ;  
В)  $x = -2$ ;      Г) критичних точок не має.



- 3 Доведіть формули похідних суми, добутку, частки двох функцій.
- 4 Доведіть формули диференціювання основних елементарних функцій.
- 5 Сформулюйте правило логарифмічного диференціювання. Наведіть приклад.
- 6 Доведіть теореми про диференціювання складної та оберненої функції.
- 7 Дайте означення диференціала функції. Який його геометричний сенс?
- 8 На чому засновано застосування диференціала до наближених обчислень?
- 9 Дайте означення похідної і диференціала вищих порядків.
- 10 Який механічний сенс похідної другого порядку?
- 11 Сформулюйте та доведіть теореми Роля та Лагранжа. Який їх геометричний сенс?
- 12 Доведіть правило Лопіталя для розкриття невизначеностей вигляду  $0/0$ . Назвіть різні види невизначеностей, для яких може бути використане правило Лопіталя. Наведіть приклади.

### 7.3 Дослідження функції за допомогою похідної

- 1 Дайте означення зростаючої та спадаючої на відрізку функції. Доведіть достатню ознаку зростання функції.
- 2 Дайте означення критичної точки та точки екстремуму функції. Доведіть достатню умову існування максимуму та мінімуму функції в точці.
- 3 Як знайти найбільше та найменше значення функції на відрізку? Чи завжди воно існує?
- 4 Дайте означення опуклості і угнутості кривої та точки перегину.
- 5 Сформулюйте достатню умову опуклості та угнутості, точок перегину кривої, заданої рівнянням  $y = f(x)$ .
- 6 Дайте означення асимптоти кривої. Як знаходяться вертикальні та похилі асимптоти лінії, заданої рівнянням  $y = f(x)$ ?
- 7 Викладіть схему загального дослідження функції та побудови її графіка.



## СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

- 1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.
- 2 Щипачёв В.С. курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.
- 3 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. Шк., 2001.
- 4 Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: «Банки и биржи», 1998.
- 5 Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под ред. В.И. Ермакова – М.: Инфра – М, 2000.
- 6 Мелентьев Б.В., Оранська А.І., Харченко А.П.. Вища математика у прикладах і задачах. – Київ УМК ВО, I ч., 1994.
- 7 Мелентьев Б.В., Оранська А.І., Харченко А.П.. Вища математика у прикладах і задачах. – Київ УМК ВО, II ч., 1994.

## ЗМІСТ

1 Програма модуля.....	3
2 Варіанти індивідуальних домашніх завдань.....	4
Завдання 1.....	4
Завдання 2.....	4
Завдання 3.....	5
Завдання 4.....	8
Завдання 5.....	17
Завдання 6.....	25
Завдання 7.....	28
Завдання 8.....	31
Завдання 9.....	32
3 Варіанти підсумкового завдання.....	33
4 Зразок виконання підсумкового завдання.....	36
5 Варіант модульного контролю і зразок його виконання.....	40
6 Перелік тестових завдань.....	43
7 Питання для самопідготовки.....	48